УДК 004

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Култан Ярослав
Экономический университет в Братиславе, Словакия

Аннотация

Интеграция информационных технологий в преподавание математики открывает новые возможности для улучшения понимания и эффективности обучения. В данной статье представлен обзор выбранных программных средств (MATLAB, GeoGebra, WolframAlpha), используемых при преподавании математики в университете, а также описаны конкретные примеры решения математических задач в табличной среде Microsoft Excel. Представленные примеры включают анализ функций, решение уравнений, а также численный вывод и интегрирование. Акцент сделан на увязке теоретических знаний математики с практическими практиками в IT-инструментах, что позволяет студентам лучше визуализировать и понимать математические концепции.

Основным вкладом работы является разграничение использования информационных технологий в процессе обучения математике и использования информационных технологий при решении математических задач в различных приложениях.

Ключевые слова

Математическое образование; информационные технологии; МАТЛАБ; ГеоГебра; WolframAlpha; Превосходить; численные методы; визуализация.

Введение

Взаимосвязь математики и информационных технологий (ИТ) в образовании в настоящее время имеет первостепенное значение. Современные программные инструменты могут поддерживать ясность и интерактивность преподавания математики – абстрактные понятия становятся более понятными благодаря визуализации и возможности экспериментировать с данными или функциями в режиме реального времени. ИТ также позволяет эффективно решать сложные математические задачи, освобождая пространство для более глубокого обсуждения интерпретации результатов и их приложений. Для студентов вузов, изучающих математику и смежных областей, необходимы знания по работе с компьютерными инструментами, так как на практике математические модели и расчеты почти всегда реализуются с помощью программного обеспечения. Статья посвящена возможностям использования выбранных программных ресурсов в обучении математике – сначала будут представлены некоторые из них, а затем будут представлены конкретные примеры использования таблиц Excel при решении выбранных математических задач. Статья посвящена вопросом применения ИТ в процессе обучения математики. Суть сводится к основной идее: - елси мы хотим чтобы студенты поняли суть математических проблем необходимо чтобы сами создали инструмент для ее решения; - если хотим, чтобы студенты использовали и принимали математические методы в решении проблем необходимо использовать созданные инструменты.

1 Обзор некоторых ресурсов программы, используемых в преподавании математики

В современном высшем образовании программный инструментарий играет все более важную роль в преподавании математики. Они позволяют не только быстро и точно решать сложные задачи, но и наглядно визуализировать математические понятия. Эта глава посвящена обзору отдельных программных продуктов, которые обычно используются в обучении – таким как MATLAB, GeoGebra и WolframAlpha – и дает описание их особенностей и возможностей применения в педагогической практике. Эти инструменты предоставляют как учителям, так и студентам эффективные средства углубления понимания и содействия самопознанию.

В преподавании математики в вузах используется несколько специализированных программных средств. Эти программы позволяют решать сложные расчеты, моделировать математические явления и визуализировать абстрактные понятия. К часто используемым средствам относятся, например:

- **MATLAB** – высокоуровневая среда программирования для численных вычислений, анализа данных и моделирования (uvt.tuke.sk). Он позволяет решать сложные математические задачи и создавать алгоритмы в дружественной для ученых и инженеров среде.
- **GeoGebra** – кроссплатформенное динамическое программное обеспечение для **динамической геометрии** и алгебры. Он предоставляет инструменты для построения и визуализации геометрических фигур, функций и статистических данных и доступен бесплатно для всех уровней образования.
- **WolframAlpha** – онлайновый вычислительный движок знаний (система знаний), который может решать математические задачи, заданные в виде вопросов или выражений. Он использует обширные базы данных и алгоритмы для генерации результата или графической визуализации заданной задачи на основе вводимых пользователем данных.

В следующих подразделах кратко охарактеризованы эти программные ресурсы и кратко указано их использование в преподавании математики.

1.1 MATLAB – краткая характеристика, применение в математике

MATLAB (MATrix LABoratory) — это мощная среда и язык программирования, предназначенный для научных и технических расчетов. Для него характерна прежде всего работа с матрицами, векторные вычисления и богатая библиотека встроенных математических функций. Согласно официальному сайту Технического университета Кошице, «MATLAB — это среда программирования для разработки алгоритмов, анализа данных, визуализации и численных расчетов» uvt.tuke.sk.

В преподавании математики MATLAB используется для решения задач линейной алгебры (например, решение систем линейных уравнений, собственных значений и векторов матриц), математического анализа (производная, интегральное преобразование, решение дифференциальных уравнений) или численной математики (итерационные методы, интерполяции и т. д.). Благодаря своим богатым графическим возможностям MATLAB позволяет визуализировать функции и данные как в 2D, так и в 3D, помогая учащимся лучше понять геометрическое значение математических результатов. Среда MATLAB также подходит для демонстрации алгоритмов – например, численные методы (итерационное решение уравнений, численное интегрирование) могут быть запрограммированы в MATLAB и экспериментировать с ними для различных входных данных, давая студентам практический опыт функционирования этих методов.

1.2 GeoGebra – преимущества и возможности

GeoGebra — это современный инструмент для обучения математике, который соединяет несколько областей математики в одну интерактивную среду. Это компьютерная программа (также доступная в виде веб-приложения), предназначенная для **динамической математики**, особенно геометрии, алгебры и анализа. GeoGebra является кроссплатформенным и бесплатным, что делает его доступным ресурсом как для студентов, так и для преподавателей. Согласно имеющимся источникам, GeoGebra — это «динамическое программное обеспечение для всех уровней образования, поскольку оно сочетает в себе геометрию, алгебру, таблицы, графики, статистику и бесконечно малое исчисление».

При преподавании математики в университете GeoGebra используется, например, при визуализации функций и их преобразований – студент может интерактивно изменить параметр в функции (например, переместить ползунок, который влияет на коэффициент в уравнении) и сразу увидеть, как меняется график функции. Таким образом, свойства функций (сдвиги, изменения амплитуды, периоды для тригонометрических функций и т. д.) могут быть очень четко изучены. Кроме того, GeoGebra также поддерживает работу со статистическими данными (например, построение графиков, регрессионный анализ) и включает в себя компьютерную алгебраическую систему (CAS) для символьных вычислений. Преимуществом является простота использования – базовые конструкции можно создавать с помощью мыши и встроенных инструментов, поэтому студенты могут сосредоточиться на математической концепции, а не на утомительном программировании.

1.3 WolframAlpha – использование для устранения неполадок и визуализации

WolframAlpha представляет собой другой тип инструмента, чем два предыдущих – это веб-сервис, который работает как **вычислительная система знаний**. Пользователь вводит запрос в форме выражения или вопроса (например, «производный sin x» или «solve x^2 + 2x – 3 = 0»), и WolframAlpha использует свои обширные базы знаний и алгоритмы для генерации ответа. Этот ответ может быть в виде числового результата, символьного выражения, графика, таблицы или даже пошагового решения. WolframAlpha была разработана компанией Wolfram Research (которая также стоит за системой Mathematica) и выпущена для широкой публики в 2009 году. Технически его называют «ответным движком», т.е. инструментом для вычисления ответов – **он отвечает на фактические и вычислительные запросы, выполняя вычисления на основе внешних данных**.

В математическом образовании WolframAlpha может служить нескольким целям. Во-первых, студенты используют его для проверки своих результатов: после решения задачи они могут проверить в WolframAlpha, правильный ли результат они получили, или узнать, как выглядит график функции из задания. Во-вторых, это позволяет им исследовать проблемы, которые они, возможно, не в состоянии аналитически выяснить напрямую, например, проверить, есть ли решение у данного уравнения, попробовать различные входные данные. WolframAlpha также часто предлагает пошаговые решения — это ценный инструмент, если студент хочет увидеть, как интегрировать или решить уравнение (однако эта функция доступна только в платной версии для некоторых запросов). И последнее, но не менее важное: WolframAlpha содержит ряд математических баз данных (значения констант, интегралов, идентификаторов) и может генерировать случайные примеры, что может облегчить преподавателям создание заданий или демонстрацию различных сценариев. Недостатком может быть то, что некритическое использование этого инструмента приводит к тому, что студент только пассивно получает ответы; Поэтому рекомендуется использовать WolframAlpha с умом – в качестве дополнения к обучению, а не в качестве замены собственных усилий.

2 Обучение выбранным задачам с помощью Excel

Microsoft Excel – это в первую очередь электронная таблица, но благодаря своей гибкости и доступности, он также часто используется в качестве инструмента для решения различных математических задач в учебном процессе. Excel содержит ряд встроенных математических функций (например, тригонометрических, статистических, логических), позволяет производить автоматические вычисления в формулах и имеет возможность создания графиков. Эти свойства делают его полезным инструментом для **численных экспериментов** — студенты могут по очереди вычислять значения функций в Excel, приближать решения и мгновенно видеть результаты. Большим преимуществом является интуитивно понятное управление и тот факт, что студенты часто уже знают Excel (например, из других предметов или практики), поэтому им не приходится преодолевать крутую кривую обучения, как с новым специализированным программным обеспечением. Ниже приведены несколько выбранных математических задач и демонстрация того, как их можно решить или продемонстрировать с помощью Excel. Каждый пример обрабатывается в виде отдельной книги (или листа) Excel с соответствующими данными, расчетами и графиками.

В этом разделе перечислены некоторые практические задачи, которые можно решить с помощью табличного редактора. Использование редактора преследует две основные цели:

- **обучать** студентов базовым теоретическим знаниям;
- **мотивировать** учащихся **к пониманию** рассматриваемых математических задач;
- **мотивировать** студентов к практическому **использованию** необходимых ресурсов программы;
- **применять** полученные знания в различных сферах жизни.

Эти цели могут быть достигнуты путем создания учащимся простого инструмента для многократного решения выбранной проблемы.

2.1 Функция полиномиальная

Название задачи: Граф и свойства степенной (полиномиальной) функции.

Математическая задача: Степенные функции (полиномы) являются функциями формы

f(x)=anxn+an−1xn−1+⋯+a1x+a0

где n – степень многочлена, а коэффициенты $и_i$ – вещественные числа. Учащиеся узнают о ходе этих функций – например, как форма графика повлияет на опережающий коэффициент и n (возрастающий/убывающий конец графика для $x\to\pm\infty$ или $x\to\pm0$), как количество и кратность корней влияет на пересечения с осью x., или как выглядят экстремумы на более низких уровнях. Теоретическое изучение этих свойств может быть абстрактным, поэтому полезно видеть конкретные графики и изменять коэффициенты в интерактивном режиме. На рисунке (Рисунок 1) показаны некоторые функции.

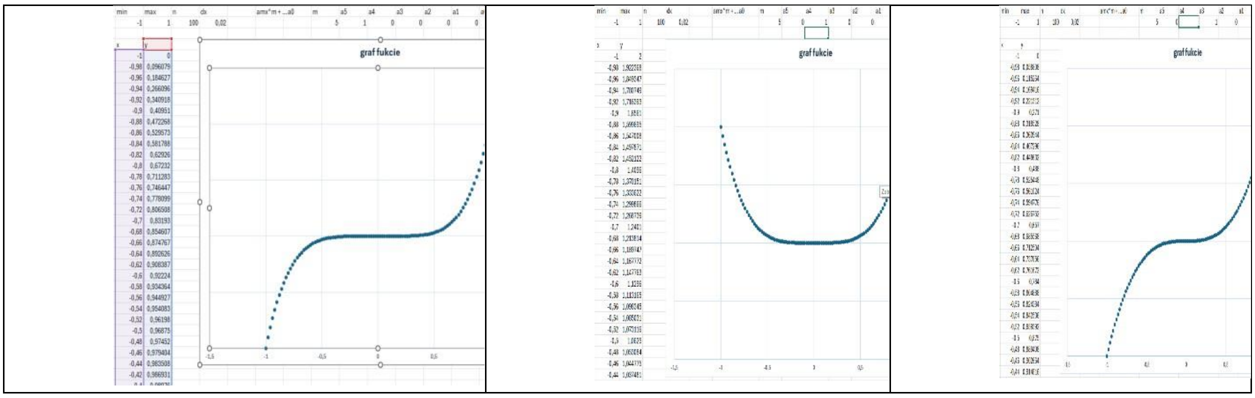

Рисунок 1 – Графическое представление полиномиальных функций

Решение в Excel: С помощью Excel легко создать таблицу значений любого полинома и отобразить ее график. В подготовленном листе Excel "Power Function" пользователь имеет возможность ввести степень многочлена (максимум до 5) и значения коэффициентов a5, a4,...,a0 в зарезервированные ячейки. Впоследствии автоматически генерируется таблица значений x и y=f(x). В частности, в ячейках таблицы есть формулы для вычисления значения полинома – для каждой строки со значением x, y вычисляется с использованием заданных коэффициентов. Как правило, диапазон x устанавливается от определенного минимума до максимума (например,$x\in\langle-1,1\rangle$ или произвольно, как указано), при этом шаг Δx выбран достаточно маленьким (например, 0,01 или в соответствии с числом сегментов n, чтобы сделать график гладким). Таким образом, Excel создает дискретный набор точек (x,y), которые представляют график функции. С помощью инструмента **«График»** (точечная диаграмма XY) эти точки затем отображаются в системе координат.

Таким образом**, влияние отдельных коэффициентов** на форму полинома может быть изучено в интерактивном режиме. Excel позволяет изменять значения коэффициентов по своему усмотрению, а график визуализируется в динамическом режиме.

Преимущества использования Excel: Использование Excel для этой цели привносит в обучение иллюстративный элемент (Рисунок 2). Учащимся не нужно вручную вычислять множество полиномиальных значений — вместо этого они могут сосредоточиться на интерпретации графика и свойств функции. Интерактивная настройка коэффициентов поощряет экспериментирование: студент может узнать, что произойдет с ходом графика, если, например, он добавит член +5x2 к полиному или изменит постоянный член. Такая «игра» с функцией приводит к лучшему интуитивному пониманию таких концепций, как доминирование высшей степени над великим |x| симметрии графа (например, когда отсутствуют четные или нечетные члены) и тому подобное. Excel служит здесь в качестве **Инструмент мгновенной визуализации**, тем самым дополняя теоретическое объяснение практическим опытом.

2.2 Тригонометрическая функция

Название задачи: Параметрическое исследование тригонометрической функции (синусоид).

Математическая задача: Триниометрические функции, такие как синус и косинус, являются периодическими функциями со специфическими свойствами. На практике часто используется общая синусоидальная волновая модель:

f(x) = a*sin(bx+c)+d

где a - амплитуда, b - влияет на период (в частности, период T=2πb c - фазовый сдвиг (горизонтальное смещение графика) и d - вертикальный сдвиг (смещение вверх или вниз). Студенты должны понимать, как каждый из этих параметров изменяет график синусоидальной функции: a - амплитуда изменяет высоту волн, параметр b изменяет частоту колебаний (количество колебаний на единицу x-оси), фазовый сдвиг c перемещает кривую влево или вправо, а параметр d перемещает всю кривую вверх или вниз.

Решение в Excel: В Excel эти взаимосвязи могут быть продемонстрированы снова, создав таблицу и график. В файле "Тригонометрическая функция" зарезервированы ячейки для параметров a,b,c,d в уравнении выше. Например, предустановленные значения могут быть a=1,b=1,c=0, D=0 Рядом с этими параметрами есть интервал для x – обычно ⟨0.2π⟩ (в десятичной аппроксимации, например, от 0 до 6.28) – и количество шагов (например, 100), из которых Excel вычисляет шаг Δx. Затем в таблице генерируется столбец значений x (от минимума до максимума с шагом Δx) и для каждого x вычисляется y с помощью встроенных тригонометрических функций Excel (функция SIN()). Результатом является набор точек (x,y)(x, y)(x,y), которые Excel отображает на диаграмме.

Ученик может изменить параметр А,Б,В,Г, и наблюдать, как изменяется кривая (Рисунок 2). Например, с предустановленной кривой и сразу видит изменение с смещение кривой влево/вправо или путем изменения d вверх/вниз и изменение и изменение величины амплитуды или на b — изменение частоты. Все эти изменения сразу видны на графике, так как Excel отображает его на основе новой таблицы значений.

Преимущества использования Excel: Такая интерактивная визуализация тригонометрических функций помогает учащимся лучше понимать периодические явления. Вместо того, чтобы рисовать статичные изображения в учебнике или вручную рисовать графики для разных случаев, учащиеся могут открыть для себя: Что, если я увеличу частоту? Что, если я добавлю фазовый сдвиг? Excel позволяет им быстро получить ответ. Кроме того, они еще и оттачивают навыки работы с электронными таблицами – например, вводят формулы с абсолютными и относительными ссылками (в этом случае формула для y будет ссылаться на ячейки с параметрами a,b,c,d абсолютно, чтобы они не менялись при копировании). В целом, Excel служит **доступным симулятором математических функций**, на котором можно интерактивно и наглядно продемонстрировать свойства функций синуса и косинуса (или других периодических функций, таких как тангенс, ограниченный полем определения и т.д.).

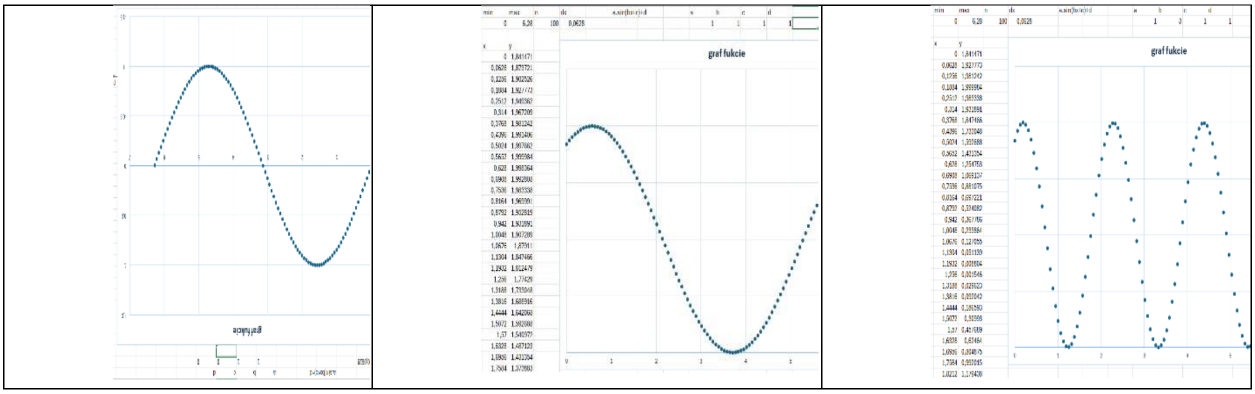

Рисунок 2 – Отображение периодических функций

2.3 Решение уравнений

Название задачи: Численное решение уравнения (нахождение корней или пересечений функций).

Математическая задача: Решение уравнения является одной из основных задач математики. Если у нас есть уравнение вида

f(x)=g(x)

Мы ищем решение в виде значений x, для которых обе стороны равны. В простых случаях уравнение может быть изменено алгебраически и может быть найдено аналитическое решение (например, квадратное уравнение решается с помощью формулы). Тем не менее, существует ряд уравнений, которые не имеют тривиального аналитического решения, или решение является длительным. В таких случаях **в дело вступают численные методы** – примерный поиск корней. Один из самых простых методов – табличный – выбрать интервал и определенный шаг, вычислить значения функций и искать, где значения пересекаются или где меняется знак разности f(x)−g(x).

Решение в Excel: В Excel мы можем реализовать базовый подход: мы создаем столбец значений x в выбранном интервале (с некоторым шагом Δx), вычисляем рядом с ним y1=f(x) и y2=g(x), а затем проверяем, для какого x y1≈y2 применимо. На листе "Решение уравнений" есть две готовые функции -

y1(x)=anxn+an−1xn−1+⋯+a1x+a0

y2(x)=bmxm+bm−1xm−1+⋯+b1x+b0

в полиномиальной форме (в общем, они могут быть разного рода, но в данном случае для простоты они являются полиномами). Пользователь вводит степени m, n, nm,n и коэффициенты a_i, b_j обеих функций. Затем Excel заполняет столбец x от минимального к максимальному (аналогично предыдущим задачам) и вычисляет столбцы y1 и y2. В следующем столбце указывается булева формула, которая проверяет, почти ли y1 и y2 равны. Например, он может использовать выражение =IF(ABS(C9 - D9) < 0.01, 1, "") – т.е. если разница |y1−y2| меньше 0.01 (допуск, установленный в ячейке δ=0.01), то он запишет в ячейку значение 1 (или какой-то другой показатель), в противном случае оставит ячейку пустой. Таким образом, в таблице появляется указание для тех x, где функции примерно равны.

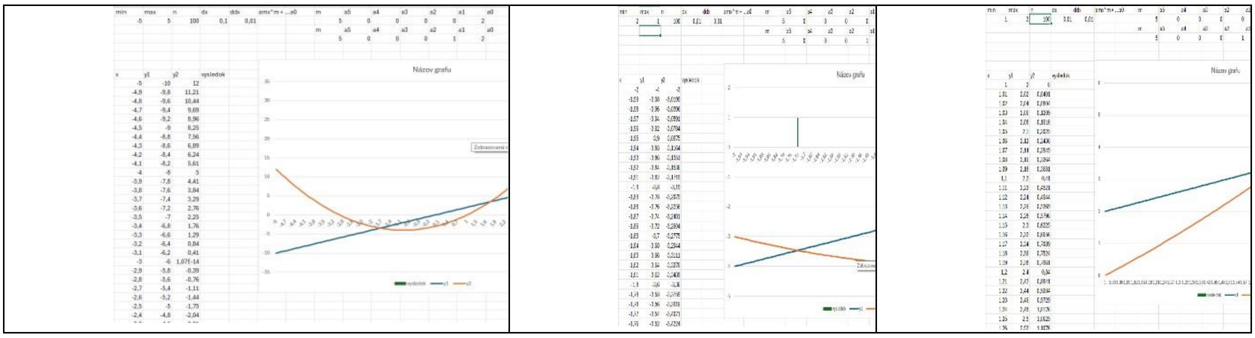

Рисунок 3 – Решение уравнений

На рисунке (Рисунок 3) — решение уравнения 2x=x2+2x−3 (y1= 2x; y2= x2+2x−3). Это квадратное уравнение, которое имеет два решения x1 ≈1,732 и x2=≈−1,732. При изменении интервала min и max значений x повышается точность расчета. Конечно, можно использовать встроенную функцию Поиск решения (Goal Seek), который доступен в Excel - но цель диссертации - помочь студентам понять принцип решения уравнений.

Преимущества использования Excel: Excel предоставляет быстрый способ итеративного поиска решений уравнений. Он позволяет учащемуся понять, что нахождение корня — это, по сути, нахождение точки, где две функции равны (или где график функции h(x)=f(x)−g(x) пересекает ось x). Этот метод усиливает интуицию – он видит, для каких интервалов f(x)−g(x) является положительным или отрицательным, и таким образом примерно угадывает, где находится корень (через изменение знака или пересечение графиков). Кроме того, Excel подходит для **поиска нескольких решений.** В отличие от ручного вычисления или базовой функции Goal Seek, которая находит одно решение, табличный расчет и график покажут все решения в заданном интервале. Таким образом, это демонстрация того, как численно подходить к решению уравнений, что является основой для более сложных численных методов (бисекция, метод Ньютона и т.д.). С дидактической точки зрения студент также потренируется в работе с условиями и логическими функциями в Excel (построение ЕСЛИ с абсолютным значением для проверки критерия).

2.4 Уравнение с периодической функцией

Название задачи: Поиск решений уравнения, содержащего периодическую функцию (множественные корни).

Математическая задача: Уравнения, в которых встречаются тригонометрические (периодические) функции, могут иметь несколько решений или даже бесконечное число решений. Типичным примером является уравнение, которое устанавливает тригонометрическую функцию, равную некоторой полиномиальной или линейной функции.

$$y1(x)=anxn+an-1xn-1+\cdots+a1x+a0$$
$$y2(x) = a*\sin(bx+c)+d$$

Такое уравнение не может быть решено алгебраически просто – не существует замкнутой формы решений с использованием элементарных функций. Тем не менее, очевидно, что решения существуют и могут быть найдены приблизительно. Кроме того, из-за периодичности синусоиды уравнение может иметь несколько корней (пересечений функций) в пределах разных периодов. В учебных целях интересно показать, как такие решения могут быть найдены численно и что без графического или численного подхода было бы трудно оценить количество решений вообще.

Решение в Excel: Процедура аналогична предыдущему случаю, только одна из функций является тригонометрической.

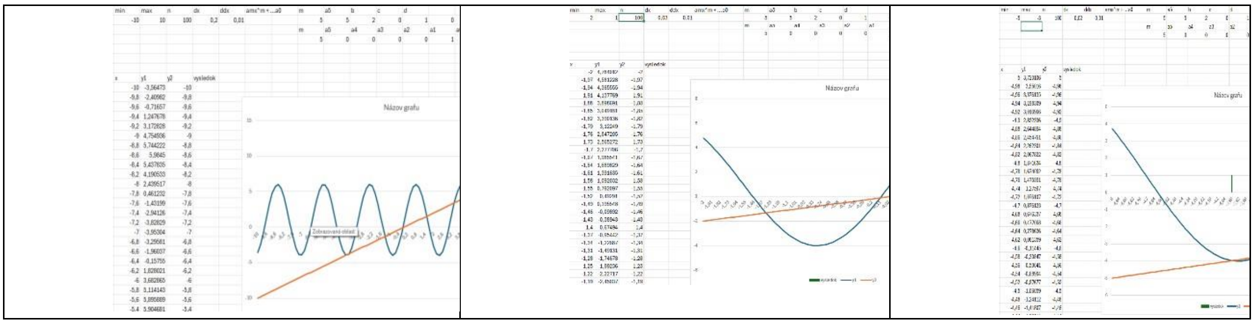

Рисунок 4 – Решение уравнения с периодической функцией.

Excel вычисляет обе функции. Графически мы ожидаем, что эти две кривые могут пересекаться несколько раз – синусоидальная волна, колеблющаяся вверх и вниз, пересекает линейную функцию, идущую по диагонали (Рисунок 4). Таблица Excel показывает конкретные примерные места расположения решений, а затем есть возможность изменить интервал вокруг найденного значения и сделать его более точным. В любом случае, Excel демонстрирует, что такое уравнение имеет **Больше решений**, и помочь их найти.

Преимущества использования Excel: Основным преимуществом является возможность систематического поиска широкого интервала и нахождения всех решений, лежащих в его пределах. Учащиеся поймут, что периодическая функция может создавать несколько пересечений с другой (например, линейной) функцией. Они могут наглядно представить, почему – синусоида колеблется вверх и вниз, линия идет прямо, поэтому они могут пересекаться многократно. Excel поддерживает эту идею с помощью графика. Кроме того, ученик попрактикуется в работе с тригонометрическими функциями в Excel (внимание на использование радианов), а также комбинации разных типов функций. По сравнению с ручным расчетом, Excel позволяет быстро изменять параметры уравнения и мы сразу видим, были ли решения добавлены/уменьшены. Таким образом, Excel служит **лабораторией для изучения нелинейных уравнений**, где можно экспериментировать и находить решения методом проб и ошибок с помощью обоснованной таблицы расчетов.

2.5 Производная функции

Название задачи: Числовая производная – аппроксимация производной функции.

Математическая задача: Производная функции f'(x) выражает скорость изменения функции – она определяется как предельный коэффициент

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

На практике, если производную нужно приблизительно вычислить численно, выбирают небольшую, но не нулевую Δx и вычисляют частное

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Такая пропорция называется дифференциальной (точнее, прямой дифференциальной дробью или наклоном уретры), а для достаточно малого Δx она близка к действительной производной. Числовой вывод используется, когда функция задается не формально (формулами, пригодными для символьного вывода), а, например, таблицей значений или сложной программой. Тем не менее, в образовании числовое выведение также полезно для понимания самой концепции производной – студенты могут попробовать, как изменяется значение дроби при уменьшении Δx и приближении к определенному значению.

Решение в Excel: Excel напрямую не предлагает производную функцию, но позволяет очень легко вычислять различия с помощью формул. В подготовленном листе "Производная" указана некая функция y=f(x) (опять же полиномиального вида, для простоты). Выбирается диапазон значений x (например, $\langle -1,1 \rangle$ и количество шагов n, из которых Excel вычисляет Δx. В таблице есть столбец x и столбец y=f(x), вычисляемые по соответствующей формуле. Далее добавляется **столбец dy/dx**, в котором вычисляется приближенная производная. Формула применяется к строкам таблицы

$$\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

что в точности является отношением приращения функциональных значений и приращения x между соседними строками. В Excel эта формула реализуется, например, в ячейке D6. Затем эта формула копируется вниз для всех строк (кроме последней, где у нее больше нет последователя для вычисления прямой разницы). В результате столбец dy/dxdy/dxdy/dx содержит для каждой строки аппроксимацию производной в заданном интервале.

На рисунке (Рисунок 5) является производной от нескольких функций второго, третьего и четвертого порядков.

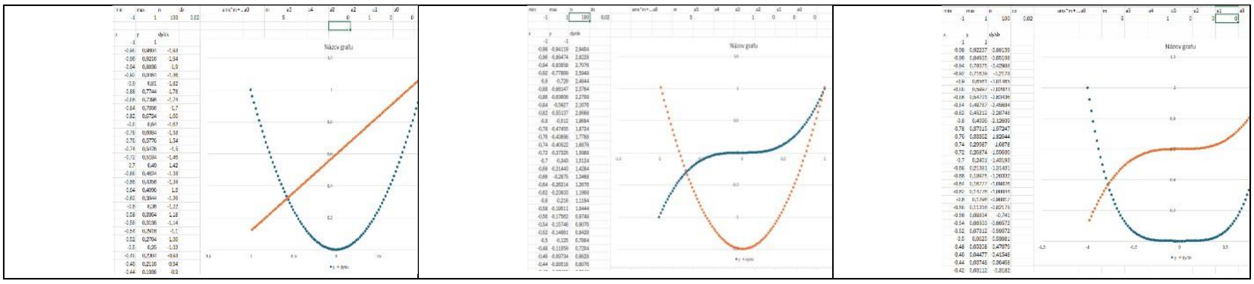

Рисунок 5 – Производные функций

Преимущества использования Excel: Числовая производная в Excel позволяет учащимся **экспериментально проверить** концепцию производной. Например, они могут попытаться вывести разные функции: полиномы, тригонометрические функции, экспоненциальные функции – и сравнить результат с ожидаемой аналитической производной. Это убедит их в том, что определение деривативы как предельного коэффициента действительно имеет смысл. Кроме того, они видят влияние размера шага Δx: если бы они выбрали слишком большой Δx, результат был бы неточным, наоборот, при уменьшении шага результаты стабилизируются до правильного значения – что является примером сходимости численного метода. С дидактической точки зрения, учащийся будет практиковаться в создании формул, относящихся к другим строкам (что укрепляет понимание относительной адресации в Excel). В целом, Excel предоставляет простой и быстрый способ продемонстрировать **вычисление производной** без необходимости в символьной математике — вам просто нужно иметь возможность подставлять определения в формулу. Такой подход также может быть полезен при экспериментах с реальными данными (дискретными точками), где производная представляет, например, скорость изменения измеряемого явления.

2.6 Интеграл функции

Название задачи: Численное интегрирование – вычисление некоторого интеграла с помощью суммы.

Математическая задача: Определенный интеграл

$$F = \int_a^b f(x)$$

Она определяется как площадь под графиком функции f(x) в интервале [a,b] (при этом области ниже оси x считаются с отрицательным знаком). Теоретически интеграл вычисляется как предельная сумма площадей тонких прямоугольников – интеграл Римана. Численно мы можем аппроксимировать интеграл, разделив интервал [a,b] на n подинтервалов ширины Δx = (b−a)/n и просуммировав сумму

$$\sum_{i-1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$$

где правильно выбрана точка в i-м подинтервале (например, правый край, левый край или центр). Этот метод называется методом прямоугольников (или трапеций, если брать среднее из значений на концах подинтервалов). Чем больше x_i^*n (т.е. чем уже прямоугольники), тем точнее аппроксимация интеграла.

Решение Excel: Excel отлично подходит для таких сводок, так как он может автоматически вычислять много строк и подсчитывать их. В листе "Integral" задана функция y=f(x) (опять же в виде полинома и интервала интегрирования ⟨a,b⟩. Пользователь выбирает количество подинтервалов n (например, 100). Excel вычисляет Δx=(b−a)/n. Впоследствии в таблице с шагом Δx генерируются значения x от a до b. В столбце y f(x) прибавляется для каждого x. А в **столбце "интеграл"** будет рассчитана кумулятивная сумма площади прямоугольников. Результаты интегралов кратных функций представлены на рисунке.

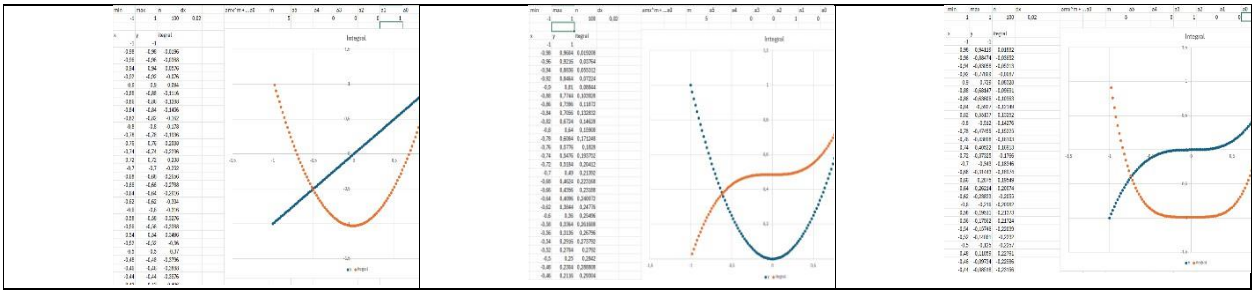

Рисунок 6 – Расчет интегралов различных функций

Преимущества использования Excel: Excel позволяет проиллюстрировать определение интеграла как предельной суммы. Учащиеся реализуют метод прямоугольников самостоятельно (хотя и просто копируя формулы) и видят, как одна за другой складывается площадь. Они могут экспериментировать с изменением количества прямоугольников – они видят, что при грубом распределении интервалов они получают менее точный результат, а по мере уплотнения интервалов результат стабилизируется. Поступая таким образом, они узнают важную концепцию **сходимость сумм Римана**. В то же время Excel демонстрирует, что интеграл можно приблизительно вычислить даже без знания примитивной функции – что является отправной точкой для методов численного интегрирования в более требовательных случаях (когда мы не можем интегрировать функцию аналитически, или интегралы, не имеющие элементарного примитива). С практической точки зрения студент снова потренируется в создании и копировании формул (абсолютных и относительных адресов) и использовании суммы накопления. Excel как инструмент отличается здесь тем, что быстро подсчитывает даже большое количество операций – вручную добавить 100 участников было бы утомительно, но электронная таблица может сделать это мгновенно. **Визуализация**: Если задача включает графическое отображение функции f(x) и затенение содержимого под графиком, Excel может построить график y=f(x) и использовать гистограмму или область для выделения области, но для этого требуются более расширенные настройки диаграммы. Проще дать учащимся возможность представить себе, что каждое приращение Δx является прямоугольником. В любом случае, результатом является то, что студенты будут лучше понимать определенные интегралы как сумму бесконечно малых площадей, реалистично моделируя их в среде электронных таблиц (Рисунок 6).

Заключение

Обучение математике с использованием информационных технологий является эффективным способом улучшения понимания абстрактных математических концепций у студентов вузов или средных школ. Сочетание традиционных методов обучения с цифровыми инструментами позволяет соединить теорию и практику, повысить мотивацию студентов и их способность применять знания в реальных ситуациях. Программное обеспечение, такое как MATLAB, GeoGebra или WolframAlpha, представляет собой современные платформы, которые предоставляют студентам пространство для экспериментов, визуализации и проверки результатов. Эти инструменты могут облегчить решение сложных задач, одновременно способствуя аналитическому и критическому мышлению.

В практической части статьи указано на использование Microsoft Excel в решении конкретных математических задач, таких как построение графиков функций, численное решение уравнений, вывод или интегрирование. Excel зарекомендовал себя как доступный и интуитивно понятный инструмент, подходящий не только для простых вычислений, но и в качестве учебной среды для понимания основных численных методов. Также важно то, что студенты могут мгновенно видеть результаты своих вводимых данных при работе в Excel, что повышает интерактивность и позволяет быстро получать обратную связь.

С точки зрения педагогической практики понятно, что сочетание преподавания математики и информационных технологий имеет потенциал для оптимизации учебного процесса и развития цифровых компетенций учащихся. Это также позволяет использовать дифференцированный подход к обучению – студенты могут развиваться в своем собственном темпе, изучать модели и создавать свои собственные решения. Поэтому в условиях растущей цифровизации образования важно, чтобы ИТ-инструменты стали неотъемлемой частью учебной программы по математике. Результаты данной статьи показывают, что правильное сочетание программного обеспечения и практических заданий приводит к повышению эффективности обучения и лучшему пониманию математического контекста.

Список используемой литературы:

1. Энгельбрехт, Д., Ллинарес, С., и Борба, М. К., 2020, Трансформация математического класса с помощью интернета, ZDM – Международный журнал по математическому образованию, 52, 825–841. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4
2. Хии, Б. Х., и Махмуд, М. С., 2023, Влияние игрового обучения в математическом образовании на когнитивную и аффективную сферу учащихся: систематический обзор, Frontiers in Psychology, 14, 1105806. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1105806
3. Джонс, С. Р., и Эли, Р., 2022, Подходы к интеграции на основе количественных рассуждений: сложение частей и накопление из скорости, Международный журнал исследований в области математического образования бакалавриата, 8 (1), 8–35. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00203-x
4. Нг, О.-Л., 2018, Изучение технологически опосредованной коммуникации с использованием коммонгитивной линзы: случай перетаскивания сенсорного экрана в средах динамической геометрии, Международный журнал научного и математического образования, 16 (6), 1173–1193. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9910-2
5. Pranckutė, R., 2021, Web of Science (WoS) и Scopus: титаны библиографической информации в современном академическом мире, Публикации, 9(1), 12. https://doi.org/10.3390/publications9010012

6. Рамирес, М. К., и Девеса, Р. А. Р., 2019, Наукометрический взгляд на математическое образование из базы данных Scopus, Энтузиаст математики, 16(4), 37–46. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol16/iss4/5

7. Свидан, О., и Йерушалми, М., 2015, Концептуальная структура функции накопления в интерактивной и многосвязной репрезентативной среде, Международный журнал исследований в области математического образования бакалавриата, 1(1), 30–58. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0020-z

8. Тёрнер, Г., и Азарелло, Ф., 2012, Оценка научных журналов по математическому образованию, Информационный бюллетень Европейского математического общества, декабрь 2012. https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2012-12-86.pdf

9. Уильямс, С. Р., и Литхэм, К. Р., 2017, Качество журнала в математическом образовании, Журнал исследований в математическом образовании, 48(4), 348–368. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.4.0348

10. Збик, Р. М., и Холлебрандс, К. Ф., 2008, Научно-обоснованный взгляд на процесс внедрения математических технологий в практику в классе преподавателями, работающими без отрыва от работы и будущими учителями, Исследования в области технологий и преподавания и обучения математике: Том 1: Синтез исследований, 287–344. https://www.nctm.org/store/Products/Research-on-Technology-and-the-Teaching-and-Learning-of-Mathematics--Volume-1--Research-Syntheses/

11. Nocar, D., Tang, Q., Laitochhová, J., & Zdráhal, T., 2016, Образовательное оборудование и программное обеспечение в математическом образовании в начальных школах Чешской Республики, в: Труды конференции ICERI2016, Севилья, Испания, ISBN 978-84-617-5895-1.

12. Csachová, L., & Jurečková, M., 2020, Преподавание математики в Словакии во время карантинного сезона COVID-19 весной 2020 года, в: Открытые исследования образования, том 2, стр. 285–294, De Gruyter, ISSN 2657-3938.

13. Гоштоньи, К., и Варга, Э., 2023, Практика и ресурсы учителей в венгерском подходе к преподаванию математики «управляемого открытия»: представление и представление «серии задач», в: ZDM – Математическое образование, том 55, стр. 641–656, ISSN 1863–9690.

14. Žilková, K., 2023, Трансформации в основах преподавания математики в Словакии: от изменений учебной программы до адаптации учебников и внедрения учителями, в: Материалы конференции SEMT 2023, Прага, Чехия.

15. Országhová, D., & Mészáros, J., 2017, Математическое образование экономистов и менеджеров при поддержке информационных технологий, в: Материалы Международной конференции по новым технологиям и приложениям электронного обучения (ICETA), Стара Лесна, Словакия, ISBN 978-1-5386-0714-2.